Partie I

1. Soient $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ n réels.
Soit A_n la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels définie par :

$$A_n = (a_{ij}) \quad \text{et} \quad a_{ij} = (\alpha_i)^{j-1} \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n \end{cases}$$

Soit D_n le déterminant de A_n.

1.1. En raisonnant par récurrence, montrer que pour tout n de $\mathbb{N} - \{0, 1\}$, on a

$$D_n = \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i)\, D_{n-1}$$

1.2. Exprimer D_n en fonction des $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

2. Soit P_n l'ensemble des polynômes à une variable, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.
Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$.
Soit f une fonction numérique définie sur $[a, b]$.
Soient $x_0, x_1, \ldots, x_n$, $(n+1)$ points distincts de $[a, b]$.

2.1. Montrer qu'il existe un polynôme p_n de P_n, et un seul, tel que :

$$\forall i \in \{0, \ldots, n\}, \quad p_n(x_i) = f(x_i)$$

2.2. Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, on pose $l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$

Montrer que $p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)$

2.3. Application numérique
On considère f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ on fixe $[a, b] = [0, 4]$
et $x_0 = 0, \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 4$.

2.3.1. Déterminer le polynôme p_2 qui interpole f aux points x_i fixés.
Tracer les courbes d'équation $y = f(x)$ et $y = p_2(x)$ dans un même repère.

2.3.2. Soit $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix}$. Déduire, du calcul de p_2, la valeur de M^{-1}.

3. Soit $f \in C^{n+1}[a,b]$. On pose $E(x) = f(x) - p_n(x)$.

Pour $t \in [a,b]$, on pose $\prod_n(t) = \prod_{i=0}^{n}(t - x_i)$

Soit x un élément quelconque de $[a, b]$, distinct des x_i.

3.1. On considère la fonction F définie sur $[a, b]$ par :

$$F(t) = f(t) - p_n(t) - \frac{f(x) - p_n(x)}{\prod_n(x)} \cdot \prod_n(t)$$

Montrer que F a au moins $(n+2)$ racines distinctes dans $[a, b]$.

3.2. Montrer qu'il existe un réel ξ_x, appartenant au plus petit intervalle fermé contenant les points $\{x, x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, tel que $F^{(n+1)}(\xi_x) = 0$.

3.3. En déduire que, pour tout x élément de $[a, b]$, il existe un réel ξ_x, appartenant au plus petit intervalle fermé contenant les points $\{x, x_0, .., x_n\}$, tel que :

$$E(x) = \frac{1}{(n+1)!} \prod_n(x) f^{(n+1)}(\xi_x).$$

3.4.1. Soit (u_n) une suite, à termes réels strictement positifs telle que :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right) = \ell \quad \text{avec} \quad \ell < 1$$

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

3.4.2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $v_n = \frac{x^n}{n!}$

calculer $\lim_{n \to +\infty} v_n$

3.4.3. On prend $f(x) = e^x$

Montrer que p_n converge uniformément vers f.

4. p_k est le polynôme d'interpolation de f aux points $x_0 \dots x_k$.

On note $f[x_0, \dots, x_k]$ ~~son~~ le coefficient ~~dominant~~ du terme de degré k.

4.1. Soit $k \in \{1, \dots, n\}$

Montrer que : $\forall x \in [a,b],\ p_k(x) - p_{k-1}(x) = f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$

4.2. En déduire :

$$\forall x \in [a,b],\ p_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, \dots, x_k](x - x_0)\dots(x - x_{k-1})$$

4.3. On note p^*_{k-1} le polynôme d'interpolation de f aux points $x_1, \dots, x_k$.

On note $f^*[x_1, \dots, x_k]$ son coefficient dominant.

Montrer que :

$$\forall x \in [a,b],\ p_k(x) = \frac{(x - x_0)\, p^*_{k-1}(x) - (x - x_k)\, p_{k-1}(x)}{x_k - x_0}$$

En déduire : $f[x_0, \dots, x_k] = \dfrac{f^*[x_1, \dots, x_k] - f[x_0, \dots, x_{k-1}]}{x_k - x_0}$

4.4. En remarquant que : $\forall i \in \{0, .., n\},\ f[x_i] = f(x_i)$, calculer les coefficients de p_2, polynôme d'interpolation de f(avec $f(x) = e^x$) aux points 0, 2, 4.

Retrouver ainsi le résultat du **2.4.1.**.

Partie II

1.1. Démontrer, pour $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'un polynôme T_n tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) \qquad (1)$$

1.2. Déterminer $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$ et $T_4(x)$.

2. Démontrer que, pour tout n supérieur ou égal à 2, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ T_n(x) = 2x\, T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$$

En déduire l'unicité de T_n vérifiant **(1)**, ainsi que le degré de T_n.

3. Montrer que : $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_n(\mathrm{ch}\,\theta) = \mathrm{ch}\, n\theta$.

4. Calculer le coefficient dominant de T_n et étudier la parité de T_n.

5.1. Montrer que : $|x| > 1 \ \Rightarrow\ |T_n(x)| > 1$

5.2. Montrer que : $|x| \leq 1 \Rightarrow |T_n(x)| \leq 1$

5.3. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, $|T_n(x)| = 1$
On précisera le nombre de racines distinctes et la disposition relative des racines des équations $T_n(x) = 1$ et $T_n(x) = -1$.

6. Après en avoir justifié l'existence, calculer $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x)\, T_m(x)\, dx$
(on discutera selon les valeurs de n et de m).

Partie III

Soit f une fonction continue sur [-1, 1].

On note $\|f\| = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)|$

On appelle meilleure approximation uniforme polynomiale de degré n de la fonction f, le polynôme $p \in P_n$ tel que $\|f - p\|$ soit minimale.

Soit $\tilde{P}_n$ l'ensemble des polynômes de P_n de coefficient dominant égal à 1.

On pose $\tilde{T}_n = \frac{T_n}{2^{n-1}}$; soit $p_n \in \tilde{P}_n$.

1. On suppose $\|p_n\| < \|\tilde{T}_n\|$. En raisonnant sur le nombre de zéros de la fonction $d_n = \tilde{T}_n - p_n$, aboutir à une contradiction.
En déduire que $\tilde{T}_n$ est le polynôme de $\tilde{P}_n$ qui réalise la meilleure approximation uniforme polynomiale de degré n de la fonction nulle sur [-1, 1].

2. Soit f une fonction polynôme appartenant à $\tilde{P}_{n+1}$.
Montrer que Q_n, défini par : $\forall t \in [-1,1]$, $Q_n(t) = f(t) - \tilde{T}_{n+1}(t)$ est la meilleure approximation uniforme polynomiale de degré inférieur ou égal à n de la fonction f sur [-1, 1].

3. Application numérique.
Soit $f(x) = x^3 - x^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ sur [-1, 1].
Déterminer $Q_2(x)$ et tracer dans un même repère les courbes de f et de Q_2 .

4. On reprend les notations de la **Partie I.**
Soit $f \in C^{n+1}[-1,1]$. Montrer qu'en choisissant les x_i égaux à $\cos\frac{i\pi}{n}$, $i \in \{0, \ldots n\}$,
on rend $\|\Pi_n\|$ minimale.